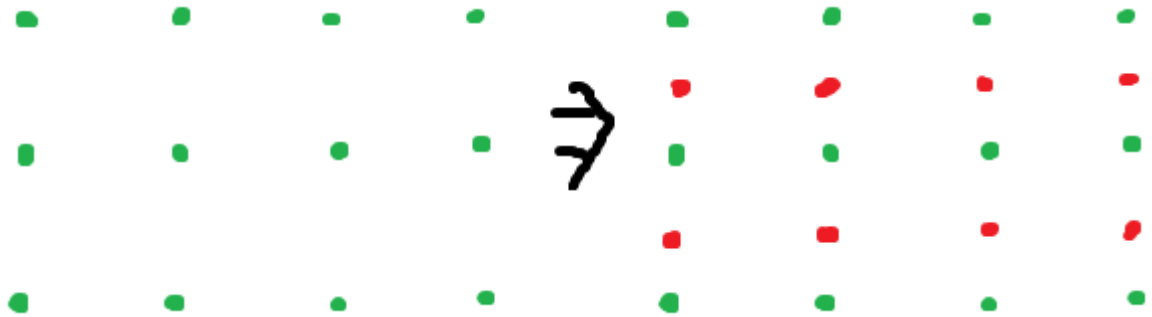
Сначала я расскажу про метод переменных направлений, используя материал, который я изначально предназначал для экзамена.

Как мы узнали из Разностных схем-1, мы вынуждены балансировать между
а) явными схемами, у которых беды с устойчивостью, зато мало операций при переходе со слоя на слой - $\mathcal{O}(N)$, где N – число точек на одной строчке.
б) неявными схемами, у которых безусловная устойчивость, но вот число операций будет уже не $\mathcal{O}(N)$, а порядка N^2 (т.к. нам приходится решать СЛАУ из N уравнений).

А нельзя и то, и то одновременно? Можно. Такие схемы называются экономичными. Они безусловно устойчивы, а число операций при переходе на следующий слой $\mathcal{O}(N)$.
Как такая магия возможна? Путём магических трюков, а именно добавления промежуточного слоя. Это схема переменных направлений, она же продольно-поперечная. Была предложена Писменом и Рэкфордом.
Давайте на неё посмотрим!

74. Приведите пример экономичной разностной схемы.

75. Напишите схему переменных направлений (схему Письмена-Рэкфорда).
Писмен и Рекфорд, которые её придумали, добавили промежуточный слой.



Напомню: если зелёные точки аппроксимируют u в данной точке, то красные ничего не аппроксимируют, они «служебные» - нужны нам для промежуточных шагов. Так что не надо думать, что мы получим вдвое большее разрешение по времени.
Сама схема:

$$\frac{y^{s+1/2} - y^s}{0,5\tau} = \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/2} + \hat{\Lambda}_2 y^s + \varphi^s,$$

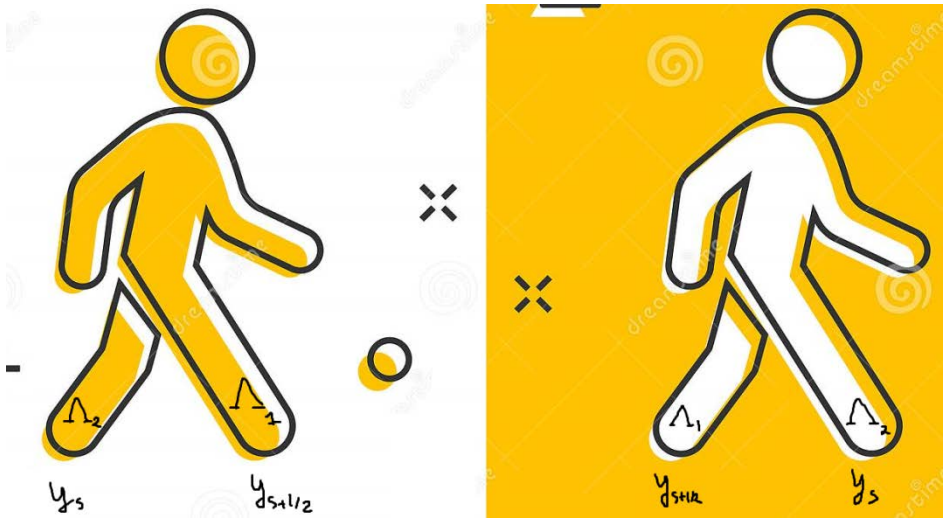
$$\frac{y^{s+1} - y^{s+1/2}}{0,5\tau} = \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/2} + \hat{\Lambda}_2 y^{s+1} + \varphi^s$$

(Немного похожа на ЛОС, но отличается!)
Как она работает? Смотрим сначала на верхнюю строчку, она отвечает переходу со слоя s на слой s+1/2.
Слева – разностная схема производной по времени.

А вот справа интересно. У нас был единый оператор Δu=$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2$, но мы его разделили на $\hat{\Lambda}_1$=u_{xx} и $\hat{\Lambda}_2$=u_{yy}. И $\hat{\Lambda}_1$ действует на $y^{s+1/2}$ (слой, к которому мы переходим, т.е. в духе неявной схемы), а $\hat{\Lambda}_2$ действует на y^s - слой, с которого мы уходим (т.е. уже как явная схема!)

Во второй строчке мы переходим со слоя s+1/2 на слой s. Слева снова разностная схема производной по времени, а справа уже $\hat{\Lambda}_1$ «тормозит», действуя на слой $y^{s+1/2}$, с которого мы уходим, а вот $\hat{\Lambda}_2$ действует на слой y^{s+1}.

Я это сравниваю с ногами при ходьбе. Когда мы переходим со слоя s на s+1/2, $\hat{\Lambda}_1$ действует на новый слой, а $\hat{\Lambda}_2$ на старый, а когда со слоя s+1/2 на s+1, наоборот:



При ходьбе также впереди то одна нога, то другая ☺

Почему эта схема называется схемой переменных направлений? Потому что в роли $\hat{\Lambda}_1$ у нас u_{xx}, а в роли $\hat{\Lambda}_2$ u_{yy}. И направления x и y как бы меняются местами: сперва одно явное, а другое неявное, а потом наоборот.

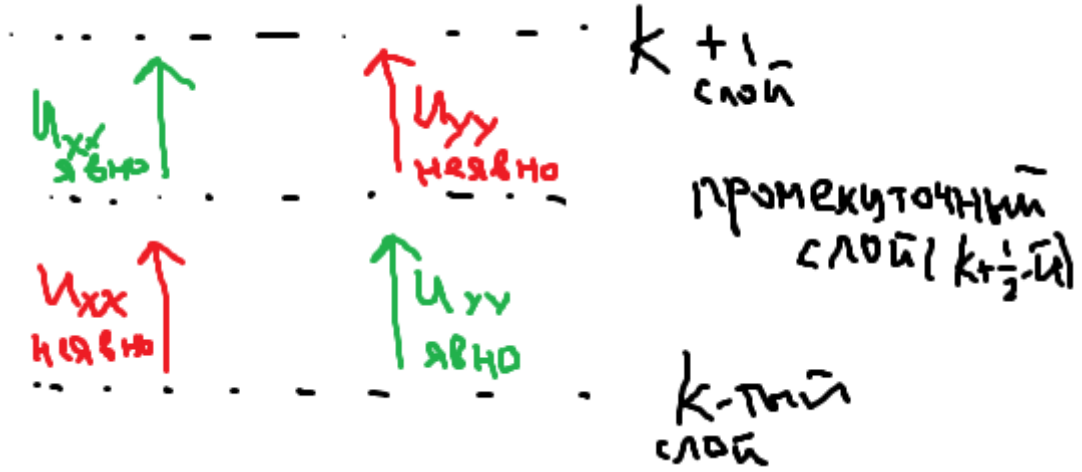
Отмечу (это не относится ко второй проге, но это любимый вопрос Боголюбова-старшего на экзамене и младшего на сдаче второй проги, так что читайте ☺), что схема Писмена и Рэкфорда не апгрейдится на 3D по причине того, что будет там неустойчива (и следовательно, неэкономична).
Проверим: рассмотрим схему
Где каждое уравнение будет неявное по одному направлению и явное по двум другим. Но тогда по каждому направлению будет два явных уравнения и одно неявное. Явное приводит к накоплению ошибки, а неявное – к её уменьшению (как говорят, отработке). Получается, мы за цикл два раза копим и один раз отрабатывает – в сумме всё рав

$$\begin{aligned}
\frac{y^{s+1/3}-y^{s}}{\tau/3} &= \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/3}+\hat{\Lambda}_2 y^{s}+\hat{\Lambda}_3 y^{s}+\varphi^{s},\\
\frac{y^{s+2/3}-y^{s+1/3}}{\tau/3} &= \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/3}+\hat{\Lambda}_2 y^{s+2/3}+\hat{\Lambda}_3 y^{s}+\varphi^{s},\\
\frac{y^{s+1}-y^{s+2/3}}{\tau/3} &= \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/3}+\hat{\Lambda}_2 y^{s+2/3}+\hat{\Lambda}_3 y^{s+1}+\varphi^{s}
\end{aligned}$$

но копим.
Когда было 2D, мы один раз копили и один раз отрабатывали – ошибка не копилась и схема была устойчивой.

Итак, а теперь переходим непосредственно 2 проге.
Что есть метод прогонки?

Счала об обозначениях.
Напомню, что во 2 проге, в отличие от 1, оператор не абы какой, а лапласиан. У него две составляющих: u_{xx}, u_{yy}, и мы «разбиваем» наш лапласиан на два оператора, и применяем метод переменных направлений:



Обращаю ваше внимание на то, что у сеточной функции три аргумента (в отличие от первой проги, где их два:
i - аргумент по x
j – номер по y
k – номер по t
Т.е. у нас этакий торт: x и y лежат в горизонтальной плоскости, а t в вертикальной, и просчитывая схему, мы накладываем слои на наш торт ☺

Вернёмся к схеме из лекций Боголюбова

$$\frac{y^{s+1/2}-y^s}{0,5\tau}=\hat{\Lambda}_1 y^{s+1/2}+\hat{\Lambda}_2 y^s+\varphi^s,$$

$$\frac{y^{s+1}-y^{s+1/2}}{0,5\tau}=\hat{\Lambda}_1 y^{s+1/2}+\hat{\Lambda}_2 y^{s+1}+\varphi^s$$

Сразу её чуть адаптируем под вторую задачу: заменим y на w…
замечание. У нас потом игрек ещё всплывёт. Так вот, игрек, который затем всплывёт, не имеет НИКАКОГО отношения к игреку, который мы сейчас заменяем на w. ОК?

А ещё выкинем неоднородность φ_s, её во второй проге нет. Так что будет так:

$$\frac{w^{k+1/2}-w^k}{0.5\tau}=\hat{\Lambda}_1 w^{k+1/2}+\hat{\Lambda}_2 w^k$$

$$\frac{w^{k+1}-w^{k+1/2}}{0.5\tau}=\hat{\Lambda}_1 w^{k+1/2}+\hat{\Lambda}_2 w^{k+1}$$

Видите операторы с крышечками? Это разностные шаблонные схемы. Подставим их явный вид. Начнём с первого уравнения, где мы с k-того слоя переходим на k+1/2-й, т.е. вот этого:

$$\frac{w^{k+1/2}-w^k}{0.5\tau}=\hat{\Lambda}_1 w^{k+1/2}+\hat{\Lambda}_2 w^k$$

Распишем:

$$\frac{0.5\tau}{h_x^2} w_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{\tau}{h_x^2}\right) w_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{0.5\tau}{h_1^2} w_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}$$
$$= -(w_{i,j}^k + \frac{0.5\tau}{h_y^2}(w_{i,j-1}^k - 2w_{i,j}^k + w_{i,j+1}^k))$$

И вот это всё приводится к виду

$$Ay_{n-1} - Cy_n + By_{n+1} = -F_n$$

Почему так?

Посмотрим на правую часть:

$$\frac{0.5\tau}{h_x^2} w_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{\tau}{h_x^2}\right) w_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{0.5\tau}{h_1^2} w_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}$$
$$= -(w_{i,j}^k + \frac{0.5\tau}{h_y^2}(w_{i,j-1}^k - 2w_{i,j}^k + w_{i,j+1}^k))$$

Там что-то длинное, но с индексом k. Т.е. это всё относится к k-тому слою, который мы уже знаем! Поэтому вся байда в правой обозначается как F.

Теперь давайте посмотрим на левую часть. Мы видим три w-шки со слоя k+1/2, с одинаковыми jшками, но разными i-шками.

Чтобы не таскать k+1/2 и jшки, которые у этих wшек всё равно одни и те же, их опускают, оставляя только i-шки:

$$y_n = w_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad y_{n-1} = w_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad y_{n+1} = w_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}$$

А коэффициенты перед ними обозначаются как A, B и C:

$$A = B = \frac{0.5\tau}{h_x^2}, \quad C = \left(1 + \frac{\tau}{h_x^2}\right), \quad F_n = w_{i,j}^k + \frac{0.5\tau}{h_2^2}(w_{i,j-1}^k - 2w_{i,j}^k + w_{i,j+1}^k)$$

В итоге и получаем

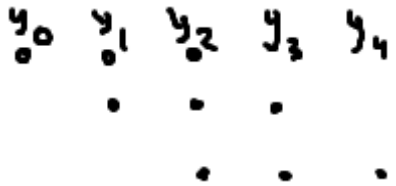
$$Ay_{n-1} - Cy_n + By_{n+1} = -F_n$$

Почему так сложно? Потому что вдоль одного направления у нас схема всё-таки неявная, а значит, мы не получаем явного выражение для k+1/2 слоя прямо сразу, нам придётся сейчас систему решать. Видно, кстати, что неявная она вдоль i-того направления, потому что j-тон направление нам никаких проблем не доставило.

И это уравнение

$$Ay_{n-1} - Cy_n + By_{n+1} = -F_n$$

справедливо для любых n. Можем записать систему:



Первое уравнение свяжет y0, y1 и y2 (см. схему, это первая строчка)
Второе свяжет y1, y2 и y3 (вторая строчка)
Третье y2, y3 и y4 (третья)
И так далее ☺
В итоге получим систему из N-1 уравнений на N+1 переменных от y1 до y_N. N-1 уравнений на N+1 неизвестных – нам нужно ещё 2 уравнения. Их мы как раз возьмём из ГУ. Вот, например, если ГУ Неймана

$$U_x|_{x=0} = U_x|_{x=\pi} = 0$$
$$U_y|_{y=0} = U_y|_{y=2} = 0$$

То на ушки будет условия

$$y_0 = y_1, \qquad y_N = y_{N-1}$$

Ну типа y на концах при проходе на шаг вправо-влево не меняется (т.е. как раз производная равна 0). Если будет ГУ Дирихле, то, как вы догадываетесь, надо уже будет занулить y_0 или y_N.

Чтобы точно вы поняли, вот вам ещё пример:

$$U_x|_{x=0} = U|_{x=\pi} = 0$$
$$U|_{y=0} = U_y|_{y=2} = 0$$

Когда вы будете переходить с k-того слоя по времени на k+1/2-й, то неявность у вас будет по x. От w^k_{ij} вы, опустив j и k, с которыми всё ОК, получите набор y_i .
Энивей у вас будет уравнение

$$Ay_{n-1} - Cy_n + By_{n+1} = -F_n$$

(лучше здесь вместо n писать i)

Слева будет y0=y1 (Дирихле), а справа Нейман (y_{N-1}=0), потому что так в исходных ГУ задачи (берём именно строчку, где «проблемная», неявная переменная. т.е. x):

$$\boxed{U_x\big|_{x=0}^{\text{II род}}} = \boxed{U\big|_{x=\pi}^{\text{I род}}} = 0$$
$$U\big|_{y=0} = U_y\big|_{y=2} = 0$$

А потом вы перейдёте с k+1/2 того слоя на k-тый, где неявь будет уже по y. «Проблемным» индексом уже будет j. Вы опять напишите уравнение

$$Ay_{n-1} - Cy_n + By_{n+1} = -F_n$$

Но на этот раз уже слева будет y0=0 (Дирихле), а справа Нейман ($y_{N-1}=y_N$).

$$U_x\big|_{x=0} = U\big|_{x=\pi} = 0$$
$$\boxed{U\big|_{y=0}^{\text{I род}}} = \boxed{U_y\big|_{y=2}^{\text{I род}}} = 0$$

Вот теперь я уверен, что вы научились ☺

Итак, система из N+1 уравнений на N+1 неизвестных.
Метод прогонки – это как раз способ решения данной системы. Заключается вот он в чём:

Решение ищется в виде $y_n = \alpha_{n+1}y_{n+1} + \beta_{n+1}$
Где альфы и беты определяются реккурентно:

$$\alpha_{n+1} = \frac{B}{C - A\alpha_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{A\beta_n + F_n}{C - A\alpha_n}$$

А α_1 и β_1 определяются из ГУ. Приведу пример. Пусть у нас

$$y_0 = y_1, \qquad y_N = y_{N-1}$$

Применяем формулу $y_n = \alpha_{n+1}y_{n+1} + \beta_{n+1}$ для n=0, получаем $y_0=a_1y_1+\beta_1$. А у нас $y_1 = y_0$. Вот и выходит $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$.
Начальные значения альфы и беты у нас, далее последовательно по формулам

$$\alpha_{n+1} = \frac{B}{C - A\alpha_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{A\beta_n + F_n}{C - A\alpha_n}$$

Считаем все альфы и беты: сначала α_2 и β_2, затем α_3 и β_3, и т.д. до α_N и β_N. Это ***прямой ход прогонки – мы считаем АЛЬФЫ и БЕТЫ последовательно, рекуррентно, ПОВЫШАЯ индекс***.
А затем, уже зная все альфы и беты, считаем уже игреки по формуле $y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}$. Начнём с игрека под НАИБОЛЬШИМ номером, и затем последовательно считаем все ИГРЕКИ, ***ПОНИЖАЯ*** индекс. Это ***ОБРАТНЫЙ ХОД ПРОГОНКИ.***

Нюанс: если справа ГУ Дирихле, то $y_N = 0$, далее считаем y_{N-1}, y_{N-2} и далее. А что, если справа Нейман? Мы не знаем y_N, мы знаем лишь, что он равен y_{N-1}. В этом случае решаем систему
$y_N = y_{N-1}$.
$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}$$
Находим из неё y_N и y_{N-1}, а затем уже обратным ходом прогонки спокойно несёмся далее влево, вычисляя y_{N-2}, y_{N-3} и прочих фантастических челов.

И всё это надо проделать два раза – когда неявной будет абсцисса (тогда n будет обозначать i) и когда неявной будет ордината (когда будет обозначать j). Именно поэтому код второй проги обычно занимает 100500 страниц и его никто не читает.